Operációkutatás #, NYME KTK III. évf. nappali

Játékelmélet

Dr. Takách Géza
NyME FMK Informatikai Intézet
takach@inf.nyme.hu
http://inf.nyme.hu/˜takach
2004. ősz

Játékelmélet

Irodalom: Hilier-Lieberman 12. fejezet

Kétszemélyes zéróösszegű játékot tekintünk: az egyik játékos azt nyeri meg, amit a másik elveszít.

Mindkét játékos néhány lehetőség (stratégia) között dönt, nem ismerve a másik döntését. Ugyanakkor sok menetet játszanak, s így esetleg kiismerhetik a másik stílusát. A kifizetési táblázat (mátrix) mutatja, hogy mely esetben mennyi lesz az 1. játékos nyeresége (= 2. játékos vesztesége). A mátrix sorai felelnek meg az 1., az oszlopai a 2. játékos startégiáinak.

Feltételezzük, hogy mindkét játékos
1. racionális (logikusan gondolkozik), és
2. önző (kizárólag maximális nyereségre törekszik).

Dominált stratégiák

Definíció. Egy játékos egyik stratégiája dominálja a másikat, ha az ellenfél minden döntése esetén legalább olyan jó, mint a másik.

A dominált stratégiákelhagyhatóak feltételezéseink miatt.

Példa.

	1	2	3
1	1	2	4
2	1	0	5
3	0	1	-1

Az 1. játékos 3-as startégiáját dominálja az 1-es, vagyis az 3. sor elhagyható:

	1	2	3
1	1	2	4
2	1	0	5

A 2. játékos 3-as startégiáját dominálja az 1-es, vagyis az 3. oszlop elhagyható:

	1	2
1	1	2
2	1	0

Az 1. játékos 2-es startégiáját dominálja az 1-es, vagyis az 2. sor elhagyható:

	1	2
1	1	2

A 2. játékos 2-es startégiáját dominálja az 1-es, vagyis az 2. oszlop elhagyható:

	1
1	1

Kaptuk: mindkét játékosnak az 1. stratégiát célszerű választania. Ekkor az 1. játékos nyeresége 1 lesz. Ezt a számot a játék értékének nevezzük.

Minimax-elv

A minimax-elv szerint mindkét játékosnak minimalizálnia kell a maximális veszteségét, másképpen maximalizálni a minimális nyereségét. Azaz:

1. játékos: a sorok minimumai közül melyik a maximális? Ez a játék alsó értéke.

2. játékos: az oszlopok maximumai közül melyik a minimális? Ez a játék felső értéke.

Ha a játék alsó és felső értékét a táblázat ugyanazon eleme adja, akkor az szükségszerűen egy nyeregpont, azaz sorában minimális, oszlopában maximális elem. Ez mindkét játékos számára hasznos, mert ha a másik eltér ettől, akkor ez neki csak javítja a hasznát.

	1	2	3	Min
1	-3	-2	6	-3
2	2	0	2	0
3	5	-2	-4	-4
Max	5	0	6	

Ha nincs nyeregpont...

A nyeregpont léte stabil megoldást ad, azaz egyik játékosnak sem hasznos eltérni a minimax kritérium adta stratégiától. (Ez a dominált stratégiák kiküszöbölésekor is igaz.) Ha nincs nyeregpont, akkor instabil lesz a megoldás:

	1	2	3	Min
1	0	-2	2	-2
2	5	4	-3	-3
3	2	3	-4	-4
Max	5	4	2	

1. sor 3. elemét adná a minimax elv. DE:
2. játékosnak az 2. stratégia jobb.
1. játékos ezt kiismeri, és áttér a 2. sorra.
2. játékos ezt kiismeri, és áttér a 3. oszlopra.
1. játékos ezt kiismeri, és áttér a 1. sorra.
$\vdots$

Kevert startégiák

Legyenek $x_1, \ldots, x_m$ illetve $y_1, \ldots, y_n$ valószínűségeloszlások, ahol m illetve n az 1. illetve a 2. játékos számára rendelkezésre álló stratégiák száma. Ezen vektorok által megadott kevert stratégiák abban állnak, hogy a játékosok az adott valószínűségeloszlások szerint véletlenszerűen választják a megfelelő startégiákat.

Például $(1/2, 1/3, 1/6)$ esetben a játékos feldob egy kockát, és 1,2,3 esetén az 1., 4,5 esetén a 2., 6 esetén a 3. stratégia mellett dönt.

A várható kifizetés, amit az 1. játékos kap:

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j,$$

ahol a_{ij} a kifizetési táblázat megfelelő elem.

Minimax kritérium:Minimalizálni kell a várható veszteségek maximumát, másképpen maximalizálni a várható nyereség minimumát.

2×2-es táblázat

Tegyük fel, hogy a kifizetési táblázat

		q	$1-q$
		1	2
p	1	k_{11}	k_{12}
$1-p$	2	k_{21}	k_{22}

és a játékosok a táblázat szélein jelzett p és $1-p$ ill. q és $1-q$ valószínűséggel választják az egyes stratégiákat. Ekkor az első játékos várható nyeresége:

$$\begin{aligned}
K &= k_{11}pq + k_{12}p(1-q) + k_{21}(1-p)q + k_{22}(1-p)(1-q) = \\
&= Apq + Bp + Cq + D = A\left(pq + \frac{B}{A}p + \frac{C}{A}q + \frac{D}{A}\right) = \\
&= A\left[\left(p + \frac{C}{A}\right)\left(q + \frac{B}{A}\right) - \frac{BC}{A^2} + \frac{D}{A}\right] = \\
&= A\left(p + \frac{C}{A}\right)\left(q + \frac{B}{A}\right) + D - \frac{BC}{A}.
\end{aligned}$$

$$K = A\left(p + \frac{C}{A}\right)\left(q + \frac{B}{A}\right) + D - \frac{BC}{A}$$

A szorzattá alakítás után maradt $D - \frac{BC}{A}$ lesz a játék értéke, míg az optimális stratégiát az biztosítja, hogy az $A(p + \frac{C}{A})(q + \frac{B}{A})$ szorzat 0 legyen. Tehát $p_{\text{opt}} = -\frac{C}{A}$ ill. $q_{\text{opt}} = -\frac{B}{A}$.

Ez abból következik, hogy ha pl. $p \neq -\frac{C}{A}$, akkor a II. játékos q megfelelő megválasztásával elérheti, hogy a szorzat értéke negatív legyen, s így K értéke csökken, azaz I. kevesebbet nyer.

Mintapélda

Adjunk optimális kevert startégiát az alábbi játékra:

		q	$1-q$
		1	2
p	1	-1	4
$1-p$	2	3	-1

Megoldás.

$$\begin{aligned}
K &= -1pq + 4p(1-q) + 3(1-p)q - 1(1-p)(1-q) \\
&= -9pq + 5p + 4q - 1 = -9(pq - \frac{5}{9}p - \frac{4}{9} + \frac{1}{9}) = \\
&= -9[(p - \frac{4}{9})(q - \frac{5}{9}) - \frac{11}{81}] = -9(p - \frac{4}{9})(q - \frac{5}{9}) + \frac{11}{9}.
\end{aligned}$$

Tehát $p_{\text{opt}} = \frac{4}{9}$, $q_{\text{opt}} = \frac{5}{9}$ és $v = \frac{11}{9}$.

Grafikus eljárás

Akkor alkalmazható, ha az egyik, mondjuk az 1. játékosnak csak 2 stratégiája van.

		y_1	y_2	y_3
		1	2	3
x	1	0	-2	2
$1-x$	2	5	4	-3

Ha $y = 1$, akkor $K = 0 \cdot x + 5(1 - x) = 5 - 5x$
Ha $y = 2$, akkor $K = -2x + 4(1 - x) = 4 - 6x$
Ha $y = 3$, akkor $K = 2x - 3(1 - x) = -3 + 5x$
Keressük ezek minimumainak maximumát, azaz az egyenesek alsó burkolójának maximumát.

Ábráról: $x = 7/11$, a játék értéke pedig $K = 4 - 6 \cdot 7/11 = 2/11$.

A 2. játékos szempontjából:

$$y_1(5 - 5x) + y_2(4 - 6x) + y_3(-3 + 5x) = 2/11$$

$$y_1(5 - 5x) + y_2(4 - 6x) + y_3(-3 + 5x) = 2/11$$

Másrészt $y_1 + y_2 + y_3 = 1$. Innen adódik, hogy $y_1 = 0$. Általában is felhasználhatjuk, hogy amely egyenes nem megy át a kérdéses metszésponton, az ahhoz tartozó y_j értéke 0.

Marad: $y_2(4 - 6x) + y_3(-3 + 5x) = 2/11$.

Ennek minden 0 és 1 közti x-re teljesülnie kell, speciálisan 0-ra és 1-re is:

$$\begin{aligned} 4y_2 - 3y_3 &= 2/11 \\ -2y_2 + 2y_3 &= 2/11 \end{aligned}$$

Ebből $y_3 = 6/11$, $y_2 = 5/11$.